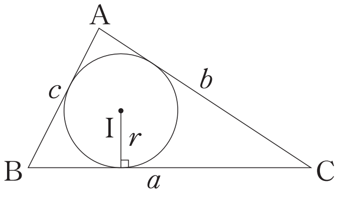
PART2 三角形の内接円と面積

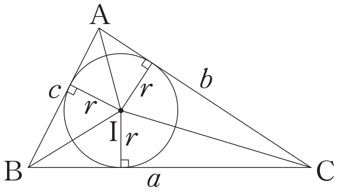
要点① 三角形の内接円と面積

三角形の３つの辺に接する円はただ１つに定まる。

この円を，その三角形の「　　　　」という。



△ABC の内接円の中心を I，半径を r とすると，△ABC は３つの三角形 △IBC，△ICA，△IAB に分割することができ，r は △IBC，△ICA，△IAB の底辺をそれぞれ辺 BC，辺 CA，辺 AB としたときの高さである。



よって，△ABC の面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}$$

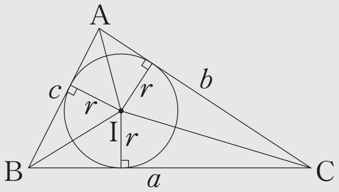
$$=\qquad+\qquad+\qquad=$$

以上より，次のことが成り立つ。

三角形の内接円と面積

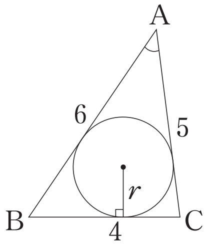
△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



例　△ABC において，$a=4$，$b=5$，$c=6$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求める。

余弦定理より



$$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{45}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

△ABC の面積を S とすると $S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より　　　　$=$　　　　$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{15}{2}r$　　$r=\frac{\sqrt{7}}{2}$

[MEMO]

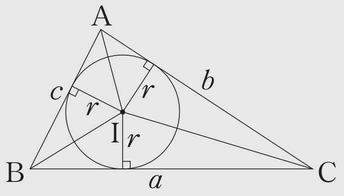
2　$a=8$，$b=7$，$c=6$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

Point Pickup

三角形の面積

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



第14講　PART2 確認問題

1　△ABC において，$a=7$，$b=3$，$c=8$ である。

この三角形の内接円の半径 r を求める。

余弦定理により，

$$\cos A=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であるから，

$$A=\boxed{\text{ウエ}}^\circ$$

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

以上により，r を求めると，

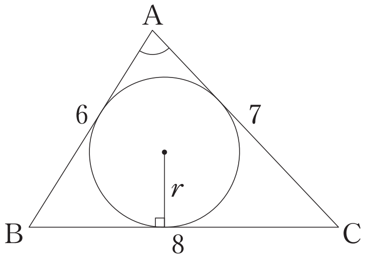
$$r=\frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

PART2 三角形の内接円と面積

2　$a=8$，$b=7$，$c=6$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

[解答]

余弦定理より



$$\cos A=\frac{7^2+6^2-8^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{21}{2\cdot7\cdot6}=\frac{1}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{21\sqrt{15}}{4}$$

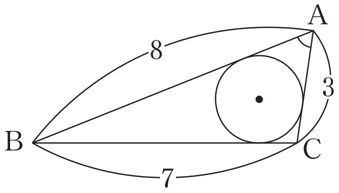
$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$\frac{21\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}r(8+7+6)\qquad\frac{21}{2}r=\frac{21\sqrt{15}}{4}\qquad\text{よって}\qquad r=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

第14講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウエ：60，オ：6，カ：3，
キ：2，ク：3，ケ：3

[解説]



余弦定理より，[A]

$$\cos A=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}$$
$$=\frac{9+64-49}{2\cdot3\cdot8}$$
$$=\frac{24}{2\cdot3\cdot8}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

> [A]　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
> $\Longleftrightarrow\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

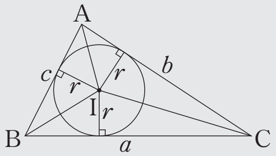
よって，$\boldsymbol{A=60^\circ}$

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin60^\circ \quad \text{[B]}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$$

> [B]　△ABC の面積を S とすると，
> $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ より，[C]

$$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+3+8)$$
$$9r=6\sqrt{3}$$
$$\boldsymbol{r=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

> [C]　三角形の内接円と面積
> △ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，
> $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$